

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

*Заведующий кафедрой
теории функций и геометрии*



Е.М. Семенов

25.05.2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.34 Комбинаторная геометрия

1. Код и наименование специальности:

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Специализация: Современные методы теории функций в математике и механике

3. Квалификация выпускника: Математик. Механик. Преподаватель.

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра теории функций и геометрии

6. Составители программы: Семенов Евгений Михайлович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой

7. Рекомендована: НМС математического факультета ВГУ, протокол № 0500-06 от 25.05.2023 г.

8. Учебный год: 2025/2026

Семестр(ы): 6

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целями освоения учебной дисциплины являются:

ознакомление студентов с основными теоремами, проблемами и методами комбинаторной геометрии.

Задачи учебной дисциплины:

- ознакомление с понятиями, фактами комбинаторной геометрии, математическими алгоритмами и областями их использования на практике с методами интерпретации;
- приобретение умений применять теоретические знания и комплекс математических алгоритмов для решения исследовательских задач предметной области и развития методов комбинаторной геометрии;
- овладение современным математическим аппаратом и его приложениями, способностью их использования при решении задач анализа и синтеза.

10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Дисциплина «Комбинаторная геометрия» относится к обязательной части блока Б1 основной профессиональной образовательной программы по специальности 01.05.01 – Фундаментальные математика и механика.

Для освоения дисциплины необходимы знания дисциплин: дискретная математика, алгебра. Освоение дисциплины позволит в дальнейшем изучать дисциплины: теория чисел, численные методы, а также специальные курсы специализации. Содержание дисциплины является продолжением общих математических курсов. Дисциплина необходима для успешного написания курсовых и дипломных работ.

Наиболее важные проблемы комбинаторной геометрии связаны с проблемой Борсука, теоремой Хелли, задачей освещения. Эти проблемы рассматриваются в евклидовом пространстве, а также в n -мерных банаховых пространствах. Одна из важных задач комбинаторной геометрии – нахождение или оценка константы Юнга.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1.	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	ОПК-1.1.	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знать: - актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики.
		ОПК-1.2.	Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности	Уметь: - использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности.
		ОПК-1.3.	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Владеть: - навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе

				теоретических знаний.
--	--	--	--	-----------------------

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. (в соответствии с учебным планом) — 2/72.

Форма промежуточной аттестации - зачет.

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость			
		Всего	По семестрам		
			6 семестр	№ семестра	...
Контактная работа					
в том числе:	лекции	16	16		
	практические	16	16		
	лабораторные	-	-		
Самостоятельная работа		40	40		
в том числе: курсовая работа (проект)					
Форма промежуточной аттестации-зачет					
Итого:		72	72		

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1. Лекции		
1	Выпуклые множества.	Изучаются основные свойства выпуклых множеств.
2	Сумма множеств.	Доказываются теоремы о свойствах сумм множеств.
3	Выпуклая оболочка, теорема Каратеодори.	Даются примеры на вычисление выпуклой оболочки и доказывается теорема Каратеодори.
4	Теорема об отделимости, опорная гиперплоскость.	Доказывается теорема об отделимости, приводится ее приложение.
5	Экстремальные точки, теорема Крейна-Мильмана.	Доказывается теорема Крейна-Мильмана. Приводятся примеры.
6	Диаметр и радиус множества.	Доказываются основные свойства диаметра и радиуса множества.
7	Примеры на вычисление диаметра и радиуса множеств	Рассматриваются примеры.
8	Разбиение множества на части меньшего диаметра. Решение задачи для $n = 2$.	Доказывается теорема о разбиении множеств.
9	n -мерный случай.	Изучаются множества в n -мерном пространстве.
10	Задача о покрытии множества гомотетичными и задача об освещении, эквивалентность задач.	Доказывается теорема об эквивалентности двух задач.

11	Решение задачи об освещении для $n = 2$.	Доказывается теорема об освещении множеств на плоскости.
12	Неограниченные множества.	Задачи об освещении и о покрытии гомотетичными изучаются для неограниченных множеств.
13	Теорема Хелли (1,2).	Доказывается точность всех условий теоремы Хелли.
14	Приложения теоремы Хелли.	Приводятся различные приложения теоремы Хелли.
15	Константы Юнга (1,2).	Приводится общая оценка константы Юнга. Вычисляется константа Юнга в евклидовом случае.
16	Примеры на вычисление константы Юнга.	Рассматриваются конкретные примеры вычисления константы Юнга.
2. Практические занятия		
1	Выпуклые множества.	Изучаются основные свойства выпуклых множеств.
2	Сумма множеств.	Доказываются теоремы о свойствах сумм множеств.
3	Выпуклая оболочка, теорема Каратеодори.	Даются примеры на вычисление выпуклой оболочки и доказывается теорема Каратеодори.
4	Теорема об отделимости, опорная гиперплоскость.	Доказывается теорема об отделимости, приводится ее приложение.
5	Экстремальные точки, теорема Крейна-Мильмана.	Доказывается теорема Крейна-Мильмана. Приводятся примеры.
6	Диаметр и радиус множества.	Доказываются основные свойства диаметра и радиуса множества.
7	Примеры на вычисление диаметра и радиуса множеств	Рассматриваются примеры.
8	Разбиение множества на части меньшего диаметра. Решение задачи для $n = 2$.	Доказывается теорема о разбиении множеств.
9	n -мерный случай.	Изучаются множества в n -мерном пространстве.
10	Задача о покрытии множества гомотетичными и задача об освещении, эквивалентность задач.	Доказывается теорема об эквивалентности двух задач.
11	Решение задачи об освещении для $n = 2$.	Доказывается теорема об освещении множеств на плоскости.
12	Неограниченные множества.	Задачи об освещении и о покрытии гомотетичными изучаются для неограниченных множеств.
13	Теорема Хелли (1).	Доказывается точность всех условий теоремы Хелли. Приводятся доказательства теоремы Хелли.
14	Приложения теоремы Хелли.	Приводятся различные приложения теоремы Хелли.
15	Константы Юнга (1,2).	Приводится общая оценка константы Юнга. Вычисляется константа Юнга в евклидовом случае.
16	Примеры на вычисление константы Юнга.	Рассматриваются конкретные примеры вычисления константы Юнга.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1.	Выпуклые множества	6	6		16	28
2.	Диаметр и радиус	6	6		14	26

	множества.					
3.	Теорема Хелли	4	4		10	18
	Итого:	16	16		40	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях излагается теоретический материал, на практических занятиях рассматриваются примеры и решаются задачи по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Комбинаторная геометрия» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения необходима активная самостоятельная работа, в ходе которой рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией, обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать их на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

4. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке или в системе «Электронный университет».

Самостоятельная работа направлена на формирование навыков работы с различными источниками, систематизацию полученной информации, решение задач.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	<u>Колмогоров, Андрей Николаевич</u> . <i>Элементы теории функций и функционального анализа : [учебник] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова .— Изд. 7-е .— М. : Физматлит, 2004 .— 570 с. : ил.</i>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
2.	<u>Харазишвили, Александр Бежанович</u> . <i>Введение в комбинаторную геометрию / А.Б. Харазишвили ; Тбилисский гос. ун-т, Ин-т прикладной математики им. И.Н. Векуа .— Тбилиси : Изд-во Тбилис.ун-та, 1985 .— 148,[1]с.</i>
3.	<u>Владимир Григорьевич Болтянский, Израиль Цудикович Гохберг</u> . <i>Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, М., Наука, 1965. 108 с. Тираж 23000 экз.Серия <u>Математическая библиотека</u>, выпуск 4</i>
4.	<u>Колмогоров, Андрей Николаевич</u> . <i>Элементы теории функций и функционального анализа : учебное пособие для студ. мат. спец. ун-тов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1968 .— 496 с. : ил.</i>

5.	<u>Гуревич, Александр Петрович</u> . Сборник задач по функциональному анализу : для студентов механико-математических факультетов / А.П. Гуревич, Л.Б. Зеленко ; Саратов. гос. ун-т им. Н.Г. Чернышевского .— Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1987 .— 106, [1] с. : ил.
6.	<u>Рыбников, Константин Алексеевич</u> . Введение в комбинаторный анализ / К.А. Рыбников .— 2-е изд. — М. : Изд-во МГУ, 1985 .— 307, [1] с. : ил.
7.	<u>Холл, М.</u> Комбинаторный анализ / М. Холл ; Пер. с англ. К.А. Рыбникова .— М. : Изд-во иностр. лит., 1963 .— 96, [1] с. — (Библиотека сборника "Математика") .— Парал. тит. л. англ. факс. — Библиогр.: с.94-96.
8.	<u>Данцер, Л.</u> Теорема Хелли и ее применения / Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли ; Пер. с англ. С.И. Залгаллер; Под ред. И.М. Яглома .— М. : Мир, 1968 .— 159, [1] с. : ил.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
9.	<u>Погорелов, А.В.</u> Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]/ Погорелов А.В. – Электрон. текстовые данные. – Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. – 208 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/91909.html . – ЭБС «IPRbooks»
10.	ЭБС «Лань» : http://e.lanbook.com
11.	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – (http // www.lib.vsu.ru/)
12.	Google, Yandex, Rambler
13.	Электронный курс https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6399
14.	Научная электронная библиотека eLIBRARY.ru – рефераты, полные тексты научных статей из российских и зарубежных журналов
15.	Электронно-библиотечная система IPRbooks – полнотекстовая база учебных и учебно-методических электронных изданий (http://www.iprbookshop.ru)
16.	Электронно-библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ» – полнотекстовая база учебных и учебно-методических электронных изданий (www.biblio-online.ru)

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

Курс дисциплины построен таким образом, чтобы позволить студентам максимально проявить способность к самостоятельной работе. Для успешной самостоятельной работы предполагается тесный контакт с преподавателем.

Изучение дисциплины следует начинать с проработки настоящей рабочей программы, особое внимание, уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.

Студентам рекомендуется получить в библиотеке учебную литературу по дисциплине, необходимую для эффективной работы на всех видах аудиторных занятий, а также для самостоятельной работы по изучению дисциплины.

Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы при написании курсовых и дипломных работ.

Успешное освоение курса предполагает активное, творческое участие студента путем планомерной, повседневной работы.

В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому занятию, осуществляется контроль посещаемости и выполнения всех видов самостоятельной работы.

Самостоятельная работа обеспечивает подготовку студента к контрольной работе и зачету по дисциплине «Комбинаторная геометрия».

Самостоятельная работа включает следующие виды работ:

- работа с лекционным материалом, предусматривающая проработку конспекта лекций и учебной литературы;
- выполнение домашнего задания к занятию (решение задач, выполнение упражнений);
- подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к контрольным работам;
- подготовка к тесту;
- подготовка к зачету.

Работа с лекционным материалом:

Проработка лекционного материала сводится к прочтению конспекта лекций и/или рекомендованной литературы. Рекомендуется при самостоятельной проработке материала: во-первых, внимательно проанализировать теоретический материал, предложенный в лекциях, во-вторых, ознакомиться с материалами по соответствующей тематике из рекомендуемых источников.

Подготовка к практическим занятиям и контрольной работе:

Практические задания – задания, направленные на формирование знаний, умений и навыков обучающихся.

Контрольная работа – средство, позволяющее оценить умение студента самостоятельно и творчески рассуждать в рамках изученной темы, руководствуясь соответствующим научным инструментарием учебной дисциплины.

При подготовке к практическим занятиям и контрольной работе необходимо обратиться к конспектам лекций по данному вопросу и рекомендуемым источникам, чтобы уточнить терминологию; внимательно проанализировать ход решения задач, предложенных в лекциях; самостоятельно решить по 1-2 задачи соответствующей тематики из рекомендуемых сборников задач.

Подготовка к тесту

Тесты – это вопросы или задания, предусматривающие конкретный, краткий, четкий ответ на имеющиеся эталоны ответов. При самостоятельной подготовке к тестированию необходимо проработать лекционный материал, а также материал практических занятий по дисциплине. Заранее выяснить все условия тестирования, в частности, время, отводимое на тестирование, количество вопросов в тесте, критерии оценки результатов. Приступая к работе с тестами, внимательно и до конца прочтите вопрос и предлагаемые варианты ответов. Выберите правильные (их может быть несколько). На отдельном листке ответов выпишите цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам. Если какой-то вопрос оказался чрезвычайно трудным, то не тратьте много времени на него. Переходите к другим вопросам, после ответа на которые, нужно вернуться к пропущенным вопросам. Обязательно нужно оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

Подготовка к зачету

Для успешной сдачи зачета рекомендуется соблюдать следующие правила:

1. Подготовка к зачету должна проводиться систематически, в течение всего семестра.

2. Интенсивная подготовка должна начаться не позднее, чем за месяц - полтора до зачета: студент распределяет теоретические вопросы таким образом, чтобы успеть выучить или повторить их полностью до начала сессии.

3. 3-4 дня перед зачетом необходимо использовать для повторения: студент распределяет вопросы на первые 2-3 дня, оставив последний день свободным.

Последний день используется для повторения курса в целом, чтобы систематизировать материал, а также доучить некоторые вопросы.

17. Образовательные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При изучении дисциплины используются активные и интерактивные формы проведения лекций и практических занятий.

В основу методологии обучения данной дисциплине целесообразно положить образовательные технологии, предусматривающие активное вовлечение обучающихся в ход образовательного процесса: установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале.

Дисциплина может реализовываться с применением электронного обучения на основе дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6399>).

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft Windows 10 Enterprise, LibreOffice 5 (*Writer (текстовый процессор), Math (редактор формул)*), браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet. Осуществляется интерактивная связь с преподавателем через сеть интернет, проводятся индивидуальные онлайн консультации.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория: специализированная мебель.

Для самостоятельной работы: Компьютеры, ноутбуки с подключением к информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», доступом в электронную информационно-образовательную среду ВГУ:

Ubuntu (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ubuntu.com/download/desktop>); Visual Studio Community (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия <https://visualstudio.microsoft.com/ru/vs/community/>); LibreOffice (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ru.libreoffice.org/about-us/license/>); Lazarus (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.lazarus-ide.org/index.php>); Free Pascal (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.freepascal.org/faq.html>); NetBeans IDE (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://netbeans.org/cddl-gplv2.html>); Python 2/3 (Python Software Foundation License (PSFL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://docs.python.org/3/license.html>); 46 Gimp (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.gimp.org/about/>); Inkscape (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://inkscape.org/about/license/>); MiKTeX (Free Software Foundation (FSF), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://miktex.org/copying>); TeXstudio (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://texstudio.org/>); Maxima (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <http://maxima.sourceforge.net/faq.html>); Denwer (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <http://www.denwer.ru/faq/other.html>); 1С: Предприятие 8 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://v8.1c.ru/predpriyatie/questions_licence.htm); Foxit Reader (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия https://www.foxitsoftware.com/pdf_reader/eula.html); Deductor Academic (Academic Free License, бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://basegroup.ru/system/files/documentation/licence-deductor-academic-20160322.pdf>); WinDjView (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://windjview.sourceforge.io/ru/>); 7-Zip (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.7-zip.org/license.txt>); Mozilla Firefox

(Mozilla Public License (MPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.mozilla.org/en-US/MPL/>); VMware Player (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.vmware.com/download/open_source.html); VirtualBox (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.virtualbox.org/wiki/Licensing_FAQ); Astra Linux Common Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://dl.astralinux.ru/astra/stable/orel/>); PostgreSQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.postgresql.org/about/licence/>); GeoGebra (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.geogebra.org/license>); R (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.r-project.org/Licenses/>); Wing-101 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://wingware.com/license/wing101>); Loginom Community Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://loginom.com/platform/pricing>); MySQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия)

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
	Выпуклые множества. Сумма множеств. Выпуклая оболочка, теорема Каратеодори.	ОПК-1. Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Устный опрос Индивидуальные задания
	Теорема об отделимости, опорная гиперплоскость. Экстремальные точки, теорема Крейна-Мильмана. Разбиение множества на части меньшего диаметра. Решение задачи для $n = 2, n$ -мерный случай.		ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности	Устный опрос Индивидуальные задания
	Задача об освещении. Теорема Хелли (1). Теорема Хелли (2). Приложения теоремы Хелли.		ОПК-1.3.. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональ	Устный опрос Индивидуальные задания
				Контрольная работа
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет				Вопросы к зачету

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Примерный перечень вопросов устного опроса.

1. Понятие выпуклого множества.
2. Размерность выпуклого множества.
3. Выпуклое тело, грани выпуклого тела. Способы задания выпуклого тела. Примеры.
4. Касательный конус, его свойства.
5. Выступающие и крайние точки.
6. Понятие опорной функции и ее свойства.
7. Полярные (или двойственные) друг другу выпуклые тела.
8. Достаточные признаки выпуклости множества.
9. Теорема о сумме множеств.
10. Выпуклая оболочка, теорема Каратеодори.
11. Примеры на вычисление выпуклой оболочки.
12. Теорема об отделимости, опорная гиперплоскость.
13. Экстремальные точки, теорема Крейна-Мильмана.
14. Диаметр и радиус множества.
15. Разбиение множества на части меньшего диаметра.
16. Решение задачи для $n = 2$.
17. Множества в n -мерном пространстве.
18. Задача об освещении.
19. Задача о покрытии множества гомотетичными.
20. Неограниченные множества
21. Теорема Хелли (1).
22. Теорема Хелли (2).
23. Приложения теоремы Хелли.

Пример индивидуального задания

1. Сформулировать и доказать признаки, выделяющие среди всех выпуклых тел шары, эллипсоиды, центрально-симметричные тела.
2. Пусть на прямой дана система из $2n + 1$ отрезков такая, что каждый отрезок пересекается хотя бы с n отрезками из этой системы. Докажите, что тогда найдется отрезок, пересекающий все отрезки из этой системы.
3. *Теорема Хана—Банаха.*
 - а) На плоскости даны два непересекающихся выпуклых многоугольника. Докажите, что существует такая не пересекающая их прямая, что многоугольники лежат по разные стороны от нее.
 - б) Обобщите эту теорему на случай n -мерного пространства
4. а) Пусть некоторая система дуг, принадлежащих одной окружности и имеющих длину, меньшую длины полуокружности, обладает тем свойством, что каждые три дуги этой системы имеют, по крайней мере, одну общую точку. Докажите, что тогда все дуги этой системы имеют, по крайней мере, одну общую точку.
5. а) Докажите, что если каждые три точки некоторого подмножества плоскости можно покрыть кругом радиуса R , то и все точки множества можно покрыть кругом этого радиуса.
6. На прямой выбрано 100 множеств A_1, A_2, \dots, A_{100} , каждое из которых является объединением 100 попарно непересекающихся отрезков. Докажите, что

пересечение множеств A_1, A_2, \dots, A_{100} является объединением не более 9901 попарно непересекающихся отрезков. (Точка также считается отрезком.)

7. На прямой даны $2k - 1$ белый и $2k - 1$ черный отрезок. Известно, что любой белый отрезок пересекается хотя бы с k черными, а любой черный — хотя бы с k белыми. Докажите, что найдутся черный отрезок, пересекающийся со всеми белыми, и белый отрезок, пересекающийся со всеми черными

8. На плоскости дано конечное множество точек X и правильный треугольник T . Известно, что любое подмножество X' множества X , состоящее из не более чем 9 точек, можно покрыть двумя параллельными переносами треугольника T . Докажите, что все множество X можно покрыть двумя параллельными переносами треугольника T .

9. На плоскости дано n точек, причем известно, что каждые три из них можно заключить в круг радиуса 1. Докажите, что все n точек можно заключить в круг радиуса 1.

10. Теорема Юнга. На плоскости дано n точек, расстояние между любыми двумя из которых не больше 1. Докажите, что все эти точки могут быть заключены в круг радиуса

$\frac{1}{\sqrt{3}}$.

11. Теорема Бляшке. Докажите, что всякая ограниченная выпуклая фигура ширины 1 заключает внутри себя некоторый круг радиуса $1/3$.

12. Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его соседних вершин.

На плоскости дано несколько параллельных отрезков, причем для любых трех из них найдется прямая, их пересекающая. Докажите, что найдется прямая, пересекающая все отрезки.

Примерное задание контрольной работы

Вариант - 1

1. Пусть некоторая система дуг, принадлежащих одной окружности и имеющих длину, меньшую длины полуокружности, обладает тем свойством, что каждые три дуги этой системы имеют, по крайней мере, одну общую точку.

Каков критерий на длины дуг, чтобы условие попарного пересечения дуг было достаточным для существования общей точки для всей системы?

2. Пусть A и B окружности радиуса 1 и 2 на плоскости соответственно. Посчитать $A+B$ и $A-B$.

Вариант - 2

1. Докажите, что если каждые три прямые из некоторого множества прямых можно пересечь кругом радиуса r , то и все прямые из этого множества можно пересечь кругом радиуса r .

2. Пусть $A \subset X$ — выпуклое множество, $x_1 \in \text{int}A$ и $x_2 \in \text{cl}A$. Доказать $[x_1, x_2] \subset \text{int}A$.

Описание технологии проведения

Текущий контроль успеваемости представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета.

Цель текущего контроля:

- стимулирование повседневной систематической работы обучающихся;
- повышение мотивации обучающихся к освоению дисциплины;
- проверка знаний, умений, навыков и уровня освоения компетенций.

Задачи текущего контроля:

- обеспечение оперативного контроля за ходом освоения дисциплины, приобретением и развитием навыков самостоятельной работы обучающихся, оценивание:

- уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;

- степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.

- приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Если текущая аттестация проводится в дистанционном формате, то обучающийся должен иметь компьютер и доступ в систему «Электронный университет». Если у обучающегося отсутствует необходимое оборудование или доступ в систему, то он обязан сообщить об этом. Преподавателю.

Требования к выполнению заданий (шкалы и критерии оценивания)

Текущий контроль успеваемости проводится по разделам дисциплины в форме устного опроса по теоретической и практической составляющей курса, проверки выполнения индивидуального задания и контрольной работы.

В ходе текущего контроля успеваемости используются следующие **показатели**:

- 1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом;
- 2) умение иллюстрировать ответ примерами;
- 3) логичность и полнота ответа на теоретические вопросы;
- 4) способность применять теоретические знания при решении практических задач.

Шкала оценивания:

Зачтено: выполнение заданий и ответы в ходе опроса соответствуют перечисленным показателям, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует умение решать задачи, возможно с некоторыми ошибками.

Не зачтено: ответы в ходе опроса не соответствуют ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или их отсутствие.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Перечень вопросов к зачету

1. Выпуклые множества.
2. Сумма множеств.
3. Выпуклая оболочка, теорема Каратеодори.
4. Теорема об отделимости, опорная гиперплоскость.
5. Экстремальные точки, теорема Крейна-Мильмана.
6. Диаметр и радиус множества.
7. Разбиение множества на части меньшего диаметра. Решение задачи для $n = 2$.
8. n -мерный случай.
9. Задача об освещении.
10. Теорема Хелли (1).
11. Теорема Хелли (2).
12. Приложения теоремы Хелли.

Примеры ответов на вопросы зачета:

1. Выпуклое множество

Выпуклое множество в евклидовом или другом векторном пространстве это множество, которое вместе с любыми двумя точками содержит все точки соединяющего их отрезка.

Наименьшая размерность плоскости, содержащей данное выпуклое множество называется размерностью этого выпуклого множества.

Свойства выпуклых множеств.

1. Пересечение любой совокупности выпуклых множеств есть выпуклое множество.
2. Замыкание выпуклого множества (т. е. результат присоединения к выпуклому множеству всех его предельных точек) дает выпуклое множество той же размерности.
3. Через каждую точку границы выпуклого множества проходит хотя бы одна гиперплоскость, оставляющая это выпуклое множество в одном замкнутом полупространстве.
4. Замкнутое выпуклое множество есть пересечение его опорных полупространств.
5. Два непересекающихся выпуклых множества отделены гиперплоскостью, оставляющей их в разных замкнутых полупространствах. Последнее свойство отделимости сохраняется для выпуклых множеств в бесконечномерных векторных пространствах.

2. Теорема Хелли (о пересечении выпуклых множеств с общей точкой)

Пусть K - семейство из не менее чем $n+1$ выпуклых множеств в n -мерном аффинном пространстве A^n , причем K - конечно или каждое множество из K – компактно. Тогда, если каждые $n+1$ из множеств семейства имеют общую точку, то существует точка, X - общая всем множествам семейства K .

Примерные задания при проведении зачета

1. Доказать теорему Каратеодори.
2. Является ли функция $f(x) = x^4 + 1$ выпуклой?

1. Доказать, что в пространстве \mathbb{R}^n всякий n -мерный симплекс имеет непустую внутренность.
2. Является ли функция $f(x) = x^2 + 2x + 1$ выпуклой?

1. Дать определение отделимости множеств.
2. Доказать теорему о конечномерной отделимости выпуклых множеств.

1. Является ли функция $f(x) = x^3$ выпуклой?
2. Дать определение относительной внутренности выпуклого множества.

1. Является ли выпуклая оболочка замкнутого множества замкнутым?
2. Пусть A и B окружности радиуса 1 и 2 на плоскости соответственно. Посчитать $A+B$ и $A-B$.

1. Пусть $A \subset X$ — выпуклое множество, $x_1 \in \text{int}A$ и $x_2 \in \text{cl}A$. Доказать $[x_1, x_2) \subset \text{int}A$.
2. Является ли выпуклая оболочка замкнутого множества замкнутым?

Описание технологии проведения

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Основные задачи:

- осуществление независимой, качественной, объективной оценки учебных достижений обучающегося и определение соответствия или несоответствия уровня сформированности компетенций планируемым результатам.

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в 6 семестре в форме зачета в формате собеседования. Обучающийся получает два задания: теоретические вопросы и практическое задание. Время подготовки к ответу не должно превышать 45 минут. По желанию, студент может начать ответ без подготовки. При необходимости, преподаватель может задавать уточняющие и дополнительные вопросы.

Требования к выполнению заданий (шкалы и критерии оценивания)

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие **показатели**:

- 1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом;
- 2) умение иллюстрировать ответ примерами;
- 3) логичность и полнота ответа на теоретические вопросы;
- 4) способность применять теоретические знания при решении практических задач.

Для оценивания результатов обучения на зачете используется **шкала**: «зачтено», «не зачтено».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения:

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом, теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, полно и логично строить ответы, применять теоретические знания для решения практических задач	<i>Повышенный уровень</i>	<i>зачет</i>
Обучающийся владеет понятийным аппаратом, теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, допускает незначительные ошибки при ответе, решение практической задачи доведено не до конца.	<i>Базовый уровень</i>	<i>зачет</i>
Обучающийся частично владеет понятийным аппаратом дисциплины, фрагментарно способен дать ответ на поставленный вопрос.	<i>Пороговый уровень</i>	<i>зачет</i>
Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки,	–	<i>Незачет</i>

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

1. Существует ли невыпуклый многогранник, вписанный в сферу?
2. Можно ли закрыть точечный источник света
 - (а) тремя;
 - (б) четырьмя

попарно непересекающимися шарами?

3. Существуют ли в пространстве тело T и две плоскости α и β такие, что ортогональные проекции тела T на плоскости α и β — это круги разных радиусов?

4. Пространство разбито на одинаковые кубики. Верно ли, что для каждого из этих кубиков обязательно найдется другой, имеющий с ним общую грань?

5. Можно ли намотать нерастяжимую бесконечную ленту на бесконечный конус так, чтобы сделать вокруг его оси бесконечно много оборотов? Ленту нельзя наматывать на вершину конуса, а также разрезать и перекручивать.

6. Существует ли выпуклый многогранник, все грани которого — треугольники или шестиугольники, который можно разбить на две части и сложить из них куб?

7. В пространстве расположены четыре попарно скрещивающиеся прямые. Верно ли, что всегда можно выбрать одну из них и выдвинуть, не задевая остальные? (Выдвинуть означает задать ненулевой вектор пространства, неколлинеарный этой прямой, и непрерывно перемещать прямую вдоль этого вектора).

8. Можно ли куб разрезать на несколько попарно различных кубов

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

Тестовые задания.

- Задания закрытого типа – средний уровень сложности (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

- Задания закрытого типа - средний уровень сложности (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- за каждый верный ответ ставится 1 балл, при этом за каждый неверный ответ вычитается 1 балл;
- 0 баллов — не выбрано ни одного верного ответа.

- Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- за каждое верное сопоставление ставится количество баллов, равное максимальному (2 балла), деленному на количество предлагаемых в вопросе сопоставлений;
- 0 баллов – ни одно сопоставление не выбрано верно.

- Задания открытого типа (короткий ответ):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЙ

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Направление/специальность 01.05.01 Фундаментальные математика и механика
код и наименование направления/специальности

Дисциплина Б1.О.34 Комбинаторная геометрия
код и наименование дисциплины

Специализация Современные методы теории функций в математике и механике
в соответствии с Учебным планом

Форма обучения очная

Учебный год 2025/2026

Ответственный исполнитель

Зав. кафедрой ТФиГ _____
должность, подразделение подпись

Семенов Е.М. _____.__ 20__
расшифровка подписи

Исполнители
Зав.кафедрой ТФиГ _____
должность, подразделение подпись

Семенов Е.М. _____.__ 20__
расшифровка подписи

СОГЛАСОВАНО

Куратор ОПОП
по направлению/специальности _____
подпись

_____.__ 20__
расшифровка подписи

Начальник отдела обслуживания ЗНБ _____
подпись

_____.__ 20__
расшифровка подписи



Программа рекомендована НМС математического факультета,
протокол № 0500-06 от 25.05.2023 г.